

PROGRAMACION LINEAL

En un problema de programación general precisamos escoger valores para las variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ que hagan óptima alguna función $f = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Donde existen limitaciones a los valores que puedan asumir las variables.

Si estamos en un caso de programación lineal tanto la función objetivo como las restricciones son lineales, las variables tienen que ser positivas o cero ($x_j \geq 0$). También se ha de verificar que $b_j \geq 0$.

La función que va a ser maximizada o minimizada es la función objetivo, las desigualdades se denominan limitaciones o restricciones.

La función objetivo a maximizar o minimizar es $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$.
Las limitaciones son de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{aligned}$$

En consecuencia $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ y $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$

Toda solución x_j a un problema de programación lineal que tenga n variables y m incógnitas con $n > m$ es factible si los $x_j \geq 0$ para $j=1, \dots, n$; y diremos que la solución es básica si no más de m variables $x_j > 0$.

Si un problema de P.L. tiene alguna solución que optimice la función objetivo bajo ciertas restricciones, entonces tiene una solución básica factible y la región factible es un conjunto limitado por semiplanos y siempre es un conjunto convexo.

METODO SIMPLEX

Es un método algebraico, iterativo que comienza con cualquier solución básica factible de las ecuaciones de limitación. Si dicha solución no es óptima el m.s. nos indica que variable se puede introducir para mejorar la solución básica factible, en caso de que no exista una solución óptima el m.s. también nos lo indica.

CASO ESTANDAR DE MAXIMIZACIÓN

Llamaremos caso estandar de maximización aquel problema de programación lineal que necesitemos maximizar y donde todas las restricciones sean " \leq ", y a la solución de la función objetivo le llamaremos Beneficio.

Lo primero que necesitamos para utilizar el m.s. es transformar las desigualdades en igualdades por lo que el " \leq " se convierte en un "=" añadiendo una variable no negativa llamada "variable de holgura", siendo una distinta para cada inecuación.

Las variables de holgura representan la capacidad no utilizada por lo que su contribución al Beneficio es cero. A partir de esto construimos la tabla.

TABLA PARA LA APLICACION DEL METODO SIMPLEX

c _j	c ₁	c ₂	c ₃	c _n	
O _i	x ₁	x ₂	x ₃	x _n	b _i
O ₁	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a _{1n}	b ₁
O ₂	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	a _{2n}	b ₂
O ₃	a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃	a _{3n}	b ₃
.
.	a _{ij}
.
O _m	a _{m1}	a _{m2}	a _{m3}	a _{mn}	b _m
z _j	z ₁	z ₂	z ₃	z _n	

$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$z_3 - c_3$	$z_n - c_n$
-------------	-------------	-------------	-------------	-------	-------------

É Elegimos la columna cuyo $z_j - c_j$ sea más negativo, y dentro de ella la variable a la que corresponda el menor $\frac{b_i}{a_{ij}}$.

É Significado de z_j : Representa la reducción en la función objetivo como consecuencia de introducir una unidad de x_j en la solución.

É Puesto que c_j es el efecto directo en el aumento sobre la función objetiva como consecuencia de introducir una unidad de x_j en la solución, $c_j - z_j$ es el incremento neto debido a la introducción de una unidad de x_j en la solución, por lo tanto $z_j - c_j$ es la reducción neta pero si es negativo es el aumento neto de la función objetiva debido a la introducción de una unidad de x_j en la solución.

É O_j es el coeficiente de x_j en la función objetiva, por lo tanto si tenemos m restricciones

$$z_k = \sum_{j=1}^m O_j \cdot a_{jk}$$

É Un caso más general en un problema de maximización es cuando existen desigualdades " \leq ", entonces añadiremos la variable de holgura restando. Esto presenta el problema de que entonces la solución básica inicial no es factible, ya que aparecen soluciones negativas y eso no es posible, por lo que tendremos que utilizar las llamadas variables artificiales junto con el método de la M-grande.

É Del mismo modo si aparecen b_i negativas en una restricción " \leq " tendremos que multiplicar toda la inecuación por (-1) con lo que pasamos a tener una restricción " \geq " con lo que estamos en la misma situación que en el párrafo anterior.

É Si en vez de tener desigualdades como restricciones a la función objetivo tuviésemos igualdades entonces no necesitamos utilizar variables de holgura, pero si necesitamos utilizar variables artificiales.

É La variable artificial correspondiente tiene asociado en la función objetivo un coeficiente suficientemente grande en valor absoluto pero negativo $(-M)$ que lo utilizaremos de la misma forma que otro coeficiente de la función objetivo; pero cuando haya cumplido su misión podemos prescindir de él en el resto del ejercicio.

Si en la solución óptima aparece M entonces el problema dado no tiene solución básica factible.

Si en las condiciones iniciales del problema algún x_j puede ser menor que 0 tendremos que introducir dos nuevas variables de forma que $x_j = x_{j1} - x_{j2}$ donde cada x_{j1}, x_{j2} si son positivos.

NORMAS PARA UNA CORRECTA INTERPRETACIÓN DEL METODO SIMPLEX

É Si no hay en la fila de $z_j - c_j$ ningún número negativo entonces la solución básica factible es óptima.

Si hay $z_j - c_j$ negativos entonces se puede mejorar el valor de la función objetiva introduciendo x_j en la solución de manera que el $|z_j - c_j|$ sea el mayor de todos y el cociente correspondiente sea el menor de la columna; siempre y cuando $a_{ij} > 0$. Si en este último caso todo $a_{ij} \neq 0$ para la columna donde $z_j - c_j < 0$ entonces no habría solución óptima al problema. Si hubiera más de un $\frac{b_i}{a_{ij}}$ que fueran los menores

(que coincidieran) podremos utilizar cualquier de ellos, y nos cabe la posibilidad de varias soluciones distintas para el mismo resultado de optimización.

CASO ESTANDAR DE MINIMIZACIÓN

É El caso estandar de minimización tiene como restricciones desigualdades del tipo " \geq ", para resolverlo haremos la maximización de la función $(-f)$ y seguiremos el proceso anterior, pero dado que las restricciones son " \geq " tendremos que utilizar el método de la M-grande; o bien utilizar el método del primal-dual que será más fácil y rápido.

Ê Si en un caso de minimización aparecen todo tipo de restricciones: "\$", "#", "=", haremos la maximización de (-f) y procederemos como en el caso general de la M-grande.ĭ

Ê En el caso de minimización utilizando variables artificiales el signo de M en los coeficientes que aparecen en el cuadro del M.S. sigue siendo negativo.ĭ

Ê Para resolver un problema de minimización por el método del dual plantearemos el cuadro del simplex correspondiente a la matriz traspuesta y trabajaremos con él como si fuera un problema de maximización hasta encontrar la solución básica factible; en ese momento tendremos en cuenta lo siguiente: **A)** La solución que es máximo en el dual será el mínimo del primal (que es lo que andamos buscando). **B)** Las soluciones buscadas para el primal serán los $z_j - c_j$ del dual.ĭ

Una explotación agrícola de 25 Ha. puede tener dos cultivos, A y B el beneficio neto de una Ha. de A es 20 unidades monetarias, el de una Ha. de B es de 30 unidades monetarias. La máxima disponibilidad de tabajo para la explotación es de 80 jornadas. Una Ha. de A necesita 4 jornadas, mientras que una de B precisa sólo dos. El coste de los materiales emprlados se eleva a 5 u.m. pro Ha. de A y 10 por Ha. de B, siendo la máxima disponibilidad de 200 u.m.. Obtener el número de Ha. de A y de B a cultivar para que el Beneficio sea máximo. a) Método gráfico b) Método Simplex.

	BENEFICO	JORNADAS	COSTO MEDIO
A	20	4	5
B	30	2	10
		30	200

El departamento de chasis de un taller dispone de 25 trabajadores, el de pintura de 18, el de montaje de 30 y el de control de 20 trabajadores; todos en jornadas de 8 horas. El margen de beneficios de cada uno de los modelos son 200.000, 140.000, 80.000 y de 40.000 respectivamente. ¿Cuál es la construcción óptima de tractores a producir para que el beneficio sea máximo?

HORAS	CHASIS	PINTURA	MONTAJE	CONTROL
MOD 200	8	6	8	4
MOD 105	6	3	8	2
MOD 70	4	2	6	2
MOD 45	2	1	4	2

Un agricultor tiene 640 m² para árboles frutales: naranjos, perales y manzanos. Se pregunta de que forma repartirá la superficie de la parcela entre los frutales para conseguir el máximo beneficio sabiendo que: cada naranjo necesita 16m² cada peral 4m² y cada manzano 8m². Tiene 900 horas de trabajo al año (150 jornales) precisando cada naranjo 30 h/a; cad peral 5 h/a y cad manzano 10 h/a. Los beneficios son de 50, 25, y 20 unidades monetarias por cada naranjo, peral y manzano repectivamente.

Una fábrica de maquinaria está produciendo dos tipos de máquinas que llamaremos M₁ y M₂, a razón de 35 unidades de M₁ y 120 unidades de M₂. Suponiendo que el mercado puede absorber todas las unidades que se produzcan, se desea saber utilizando el método de gráfico de programación lineal, si es posible cambiar el número de unidades que se está produciendo para obtener un mayor beneficio. Los tiempos de proceso que requiere la producción de las máquinas en los departamentos involucrados en su elaboración, y el número de horas totales disponibles en dichos departamentos aparecen en la siguiente tabla:

MODELO	M ₁	M ₂	HORAS Dpto.
--------	----------------	----------------	-------------

