Probabilidad

1. Experimento aleatorio.
   a. Espacio muestral.
   b. Partes de E.

2. Sucesos.
   a. Suceso
   b. S. elemental
   c. S. imposible
   d. S. seguro
   e. S. contrario

3. Álgebra de sucesos.
   a. Operaciones de sucesos.
      i. Igualdad
      ii. Unión
      iii. Intersección
      iv. Diferencia
      v. Propiedades.
   b. Álgebra de sucesos.
   c. Sistema completo de sucesos.
   d. Suceso compuesto.

4. Frecuencias
   a. Frecuencia absoluta.
   b. Frecuencia relativa.
   c. Propiedades de la frecuencia relativa.

5. Probabilidad: Definiciones.
   a. Definición frecuentista de la probabilidad.
   b. Definición clásica de Laplace.
   c. Definición axiomática de probabilidad..
   d. Propiedades.

6. Probabilidad condicionada. .
   a. Definición.
   b. Sucesos independientes.
   c. Sucesos dependientes.
   d. Teorema de las probabilidades totales.
   e. Teorema de Bayes.

1 Experimento aleatorio

Llamamos **experimento aleatorio** a toda experiencia cuyo resultado no es predecible al ser realizada en las mismas condiciones un número ilimitado de veces. Es esencial especificar que aspecto del resultado nos interesa observar, dicho de otra manera, cual va a ser nuestro criterio en el estudio del fenómeno, esto se logra indicando cual es el espcio muestral. A cad a realización de un experimento se llama prueba. Un experimento que no sea aleatorio le llamaremos exp. determinista.

Espacio muestral.- Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio; lo denotaremos por E

Partes de E.- Es el conjunto formado por todos subconjuntos E.

2 Sucesos

Suceso.- Es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Suceso elemental.- Es todo subconjunto unitario del espacio muestral. Son sucesos que no se pueden descomponer en otros más sencillos, están formados por un sólo elemento.

Suceso imposible.- Es áquel que nunca puede ocurrir. Se designa por i

Suceso seguro.- Es áquel que se verifica siempre. Coincide con el espacio muestral.

Suceso contrario.- El suceso contrario de A es el que sucede cuando no ocurre A se designa por A'.

3 Álgebra de sucesos

Igualdad de sucesos.- Dos sucesos son iguales si tienen los mismos elementos.
O si: A d B y B d A] A = B

Unión de sucesos.- El suceso A c B se da cuando se verifica A ***o*** se verifica B, ***o*** se verifican ambos sucesos simultaneamente .

Intersección de suc.- El suceso A 1 B se da cuando se verifican A ***y*** B simultaneamente.

Diferencia de suc.- El suceso A - B es el que se da cuando sucede A y no sucede B.

Propiedades.-

œ A, B, C 0 P(E)	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Asociativa	(A c B) c C = A c (B c C)	(A 1 B) 1 C = A 1 (B 1 C)
Conmutativa	(A c B) = (B c A)	(A 1 B) = (B 1 A)
Idempotente	(A c A) =A	(A 1 A) = A
Elemento neutro	A c i = A	A 1 E = E
Simplificativa	(A c B) 1 A = A	(A 1 B) c A = A
Contrario	A c A' = E	A 1 A' = i
Distributivas	A 1 (B c C) = (A 1 B) c (A 1C)	
	A c (B 1 C) = (A c B) 1 (A c C)	
Leyes de Morgan	(A c B)' = A' 1 B'	(A 1 B)' = A' c B'

$$A \cap B \subset \frac{\subset A}{\subset B} \subset A \cup B \quad (A \cap B) \cup (A \cup B) = A \cup B \quad (A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$$

$P(A \cap B)$ Suele darla el problema, (cuando se trabaja con conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A - B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De estas dos se deduce que: $$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A/B) \cdot P(B) \\ P(A \cap B) &= P(B/A) \cdot P(A) \end{aligned}$$ Elegir cual conviene utilizar es lo que hay que decidir , partiendo de cual es la condicional que nos da el enunciado.

Si los sucesos son independientes entonces: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Espacio completo de sucesos.- Dado un experimento aleatorio de espacio muestral E, se dice que el conjunto de sucesos $\{A_i\}$ con $A_i \in E$ i: 1,2,3... n, es un sistema completo de sucesos, si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$ (los sucesos son incompatibles dos a dos)

b) $\bigcup A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n =$ (la unión de todos los sucesos es el espacio muestral).

Suceso compuesto.- Es el suceso formado por el producto cartesiano de dos sucesos.

4 Frecuencias

Frecuencia absoluta.- Es el número de veces que se verifica un suceso.

Frecuencia relativa.- Es el coociente entre el número de veces que se verifica un suceso y el número de veces que se realiza el experimento. Si realizamos N pruebas y observamos que el suceso se verifica , o se produce, n veces la frecuencia relativa del suceso es $\frac{n}{N}$

Propiedades de la frecuencia relativa.-

$0 \leq f_r(A) \leq 1$

$f_r(A') = 1 - f_r(A)$

Si $A \subset B \Rightarrow f_r(A) \leq f_r(B)$

Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

$f_r(E) = 1 \qquad f_r(\emptyset) = 0$

$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$

5 Probabilidad. Definiciones

Definición frecuentista de probabilidad.- Definimos probabilidad de un suceso A como $P(A) = \lim_{n \to \infty} fr(A)$ donde n es el número de intentos.

Definición clásica de Laplace.- En el siglo XVIII Laplace definió la probabilidad del suceso A como el cociente entre los casos favorables de que ocurra el suceso A y los casos posibles, siendo equiprobables todos los sucesos elementales que forman el suceso A .

Definición axiomática de probabilidad.- Cuando los sucesos elementales no son equiprobables no es posible aplicar la definición clásica por lo que fue necesario construir otra definición que la englobara y al mismo tiempo la mejorara.

Si E es un espacio muestral finito, construimos P (E) el conjunto formado por todos sus sucesos,

subconjuntos, llamamos probabilidad a una aplicación p tal que p: $P(E) \longrightarrow [0,1]$ verificando:
1) $P(E) = 1$
2) $\forall A$ y $B \in P(E)$, incompatibles $(A \cap B = \emptyset)$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
Se le llama definición axiomática por que de esos 2 axiomas se deducen todas las propiedades de la probabilidad. Además de la propia definición de la aplicación tenemos que $p(A) \geq 0$.

Propiedades.-
1) $p(A') = 1 - p(A)$
2) Si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$
3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
4) $p(\emptyset) = 0$

6 Probabilidad condicionada.

Definición.- Definimos como $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ la probabilidad de que ocurra A cuando sabemos que ha ocurrido B y diremos que es la probabilidad de A condicionado a B.

Sucesos independientes.- Sean A y $B \in P(E)$, decimos que son sucesos independientes cuando $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Sucesos dependientes.- Llamaremos a A y B sucesos dependientes cuando la ocurrencia de o no de uno de ellos influye en la probabilidad de que se verifique el otro , es decir cuando no son independiente; entonces se verifica que $p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$

Teorema de las probabilidades totales.- Dado $\{A_1, A_2, A_3, \dots A_n\}$ un sistema completo de sucesos del que se conocen p(Ai), y dado otro suceso B. Entonces se verifica:

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B/A_i) \quad .$$

Teorema de Bayes.- Sean $\{A_1, A_2, A_3, \dots A_n\}$ un sistema completo de sucesos del que se conocen p (Ai), y dado otro suceso B. Entonces se verifica: $p(A_i/B) = \dfrac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B/A_i)}$

VARIABLES ALEATORIAS

1. Variable aleatoria
2. V. aleatoria discreta
   a. Función de densidade
   b. Función de distribución
      i. Propiedades
   c. Esperanza matemática
      i. Propiedades.
   d. Varianza.
      i. Propiedades
3. Variable aleatoria continua
   a. Función de densidade.
   b. Función distribución
      i. Propiedades

ii. Esperanza matemática
iii. Propiedades
c. Varianza
i. Propiedades
4. Dis. binomial y normal
a. Proceso Bernuilli
b. Distribución binomial
c. Distribución normal.
i. Tipificación
ii. Relación entre a normal e a binomial

Introducción

Un fenómeno ou experimento dícese **aleatorio** se pode dar lugar a varios resultados, sen que poida ser posible anunciar con certeza cal deles vai ser observado con antelación na realización do experimento. É esencial especificar cal aspecto do resultado nos interesa observar, dito de outro xeito, cal vai ser o noso criterio no estudio do fenómeno; esto lógrase mediante o espacio mostral.

1 Variables aleatorias

Os posibles resultados dun experimento aleatorio son sucesos que dependen do chou, e que dan lugar a unha función cuios resultados son números reais, esta variable chámase variable aleatoria e defínese do seguinte xeito:

Variable aleatoria .- É unha función X definida dende o espacio de sucesos, E, no conxunto dos números reais. O conxunto imaxe desta aplicación chámase percorrido da variable aleatoria. Por abuso da linguaxe confúndese coa propia variable.

As variables aleatorias poden ser discretas ou continuas.

2 Variables Aleatorias Discretas

Función de densidade.- Dicimos que unha variable aleatoria é **discreta** cando o conxunto de valores que toma con probabilidade non nula, é finito ou numerable. Esto significa que existe unha sucesión de números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ tales que:

$$P(X = x_i) = p_i \neq 0$$

$$P(X \neq x_i) = 0 \quad \text{con } i: 1,2,3 \ldots n \ldots$$

Pódese definir entón a función de densidade de probabilidade da variable aleatoria por:

$f(x_i) = p(X = x_i) \quad i: 1,2,3\ldots,n..$

$f(x) = 0 \qquad x \neq x_i$

que verifica: 1) $0 \leq f(x) \leq 1$ 2) $\sum_i f(x_i) = 1$

Función de distribución.- Chamámoslle función distribución dunha variable aleatoria discreta á función F(x) definida por $F(x) = P(X \leq x) = \sum_i f(x_i)$ con $x_i \leq x$, esta función verifica as seguintes

Propiedades

1) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in R$

2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

3) F é crecente $x \leq y$ ----> $F(x) \leq F(y)$

4) F é continua pola dereita (En xeral a súa gráfica e unha función escalonada)
5) $P(a < x \le b) = F(b) - F(a)$

Esperanza matemática.- Chamamos esperanza matématica dunha variable aleatoria discreta f(x) da que se coñecen os valores $f(x_i) = P(X = x_i)$ ó seguinte resultado:

$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + ... + x_n f(x_n) = \sum_i x_i f(x_i)$

Propiedades
1) E(c) = c, sendo c constante
2) E(X+Y) = E(X) +E(Y)
3) E(cX) = c E(X)
4) Se X e Y son variables aleatorias independentes entón $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Varianza.- Chamámoslle varianza da variable aleatoria X que ten por función de densidade a función f(x) o resultado seguinte: ;

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad E(x^2) = x_1^2 f(x_1) + x_2^2 f(x_2) + x_3^2 f(x_3) + \ldots + x_n^2 f(x_n)$$

A raíz cadrada da varianza chámase desviación típica de X.

Propiedades
1) $Var(aX) = a^2 Var(x)$
2) Var (c) = 0 sendo c unha constante polo tanto
3) $Var(aX + b) = a^2 Var(x)$

3 Variables Aleatorias Contínuas

Unha variable aleatoria dícese que é continua se o seu percorrido é un conxunto continuo

Función de densidade.- Sexa unha variable aleatoria X , chamamos función de densidade de probabilidade a unha función f(x) que verifica:

1) $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in R$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ 3) $P(a<x \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$

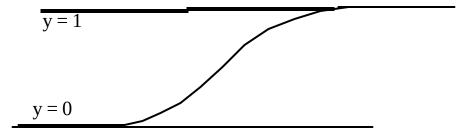
A función de densidade interprétase como a probabilidade infinitesimal de que a variable X acade valores no intervalo [x, x+dx]. A gráfica da función f(x) sería o límite do histograma de frecuencias dunha mostra con un número de datos moi grande pero cos límites dos intervalos moi pequenos dx --> 0 non obstante non representa unha probabilidade dado que P(x=a) = 0 inda que non é o suceso imposible (que sería o único con probabilidade cero), esto é debido a $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

Función de distribución.- Chamámoslle función distribución dunha variable aleatoria continua á función F(x) definida por $F(x = a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ Esta función verifica:

Propiedades:
1) $0 \le F(x) \le 1 \quad \forall x \in R$
2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ (pódese utilizar a notación $F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$)

3) F é crecente $x \leq y$ ----> $F(x) \leq F(y)$
4) F é continua pola dereita
5) $F'(x) = f(x)$, se $f(x)$ é contínua en x
6) Como $P(x=a) = 0$ entón: $P(a < x \leq b) = P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$.

A súa gráfica ten dúas asítotas horizontais que son y= 0 e y= 1, é sempre crecente e positiva



Esperanza matemática.- Chamámos esperanza matématica dunha variable aleatoria continua f(x) ó seguinte resultado: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

Propiedades
1) $E(c) = c$
2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
3) $E(cX) = c\, E(X)$
4) Se X e Y son variables aleatorias independentes entón $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Varianza.- Chamámoslle varianza da variable aleatoria X que ten por función de densidade a función f(x) o seguinte resultado : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Sendo $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$ A raíz cadrada da varianza chámase desviación típica de X

Propiedades
1) $Var(aX) = a^2\, Var(x)$
2) $Var(c) = 0$ sendo c unha constante polo tanto
3) $Var(aX + b) = a^2\, Var(x)$

4 Distribuciones binomial y normal

Proceso de Bernouilli.- Decimos que una serie de experimentos aleatorios (que son aqueles dos que non podemos afirmar de antemán cal será o seu resultado) seguen un proceso de Bernouilli cando ó realizar n probas verifícase:
a) en cada unha das probas consideranse dous sucesos incompatibles A e A'.
b) o resultado de cada proba e independente dos resultados anteriores.
c) a probabilidade de que ocurra A non varía dunha proba a outra.
Dito doutro xeito estamos ante un experimento de Bernouilli si temos n probas, cada unha independente das anteriores, con dous resultados posibles A e A' cada un deles con probabilidade constante de suceder.

Variable Aleatoria Binomial.- Sexa o suceso consistente na repetición n veces dun experimento aleatorio de Bernouilli, con r aparicións do resultado A e de (n-r) veces do resultado contrario A'. Chamaremos X a variable aleatoria que mide o número de aparicións do suceso A, é unha variable aleatoria discreta cuio resultado é $P(X=r) = \binom{n}{r} p^n q^{n-r}$ chámase variable aleatoria binomial, estando asociada ós sucesos de Bernouilli.si $0 \leq r \leq n$ e $P(X=r) = 0$ si $r < 0$ ou $r > n$

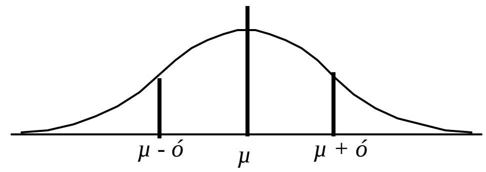
Por ser unha variable aleatoria ten asociada unha función de probabilidade, o seu cálculo é farragoso polo que para os valores máis usuais da **p** e para **n** non moi grandes están realizadas táboas.
A media e varianza dunha variable aleatoria binomial son: $E[x] = n \cdot p$ $\quad Var[x] = n \cdot p \cdot q$
Os limites recomendables para un bo resultado serán $n < 30$ $\quad 0,1 < p < 0,9$

Variable Aleatoria Normal.- Diremos que unha variable aleatoria continua X segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ que representaremos por $N(\mu, \sigma)$ se cumple as seguintes condicións:

1º) A variable X percorre o intervalo $(-\infty, \infty)$

2º) A lei de probabilidade ou densidade ven dada pola seguinte expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Esta función ten as seguientes características:
1º) A función é simétrica respecto da recta $x = \mu$
2º) A función ten unha asíntota horizontal que é o eixo OX.
3º) Ten un máximo absoluto no punto $\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
4º) Ten dous puntos de inflexión nas abcisas $x = \mu+\sigma$ $\quad x = \mu-\sigma$
5º) A área entre a función e o eixo OX é 1

Dado o complicado da función f(x) e a imposibilidade de ter táboas para tódalas medias e desviacións típicas tabulouse a función distribución de f(x) para N(0,1)

Polo que temos os resultados de $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ para $X \in N(0,1)$

Tipificación Dunha V. A. Normal.- Sexa unha variable aleatoria X, $X \in N(\mu, \sigma)$ facendo a reducción

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ teremos unha variable aleatoria pertenecente a unha N(0,1)

A D. Normal Como Límite Da D. Binomial.- Se $n \ge 30$ e $0,1 < p < 0,9$ non podemos utiliza-la distribución binomial polo complicado dos cálculos, entón conseguimos unha boa aproximación utilizando o teorema de MOIVRE : Se X é unha variable aleatoria que obedece a unha distribución binomial B(n,p) entón podemos construir unha variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$

onde $\mu = n \cdot p$ e $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Canto maior sexa n e máis próximo estea p a 0,5 mellor será a aproximación.