INTEGRAL INDEFINIDA

Daremos el nombre de función primitiva de la función f(x) en el intervalo (a,b) a toda función real de variable real F(x), derivable, tal que para todos los puntos del intervalo (a,b) verifique F'(x) = f(x).

No se excluye que una función f(x) tenga más de una primitiva puesto que (F(x) + C)' = F'(x) = f(x), por lo tanto tenemos que F(x) + C es también primitiva de f(x) $\forall$ C constante.

Al conjunto de funciones primitivas de f(x) le llamaremos integral indefinida de f(x), designado por $\int f(x)\,dx$

Dada una primitiva cualquiera de una función f(x), que denotaremos por F(x), podemos escribir $\int f(x)\,dx$ = F(x) +C

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Si F y G son dos primitivas de f entonces F - G es una constante y viceversa
(F - G)` (x) = F`(x) - G`(x) = f(x) - f(x) = 0 <--> F(x) - G(x) = cte <-->
(F - G) (x) = cte <---> F - G = C

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Sean $\int f(x)\,dx$ = F(x) + K $\Rightarrow$ F'(x) = f(x) y $\int g(x)\,dx$ = G(x) + H $\Rightarrow$ G'(x) = g(x)

$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ = F(x) + K + G(x) + H =

F(x) + G(x) + (K + H) = F(x) + G(x) + C =
(F + G) (x) + C
con lo que comprobamos que es una primitiva de F + G en conclusión

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

La demostración es análoga a la anterior.

INTEGRAL DEFINIDA

Si conocemos la ecuación de una curva y = f(x) donde f(x) ≥ 0, ¿cómo calcularemos el área entre el eje OX, la curva y las abcisas x = a, x = b?.

Denotaremos por $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x) = \int_a^b f$

al área que andamos buscando.

Definimos una **partición** de un intervalo [a, b] como una sucesión de puntos, no necesariamente a la misma distancia unos de otros, pero se puede tomar en ese sentido para simplificar los cálculos,

P = { x_0, x_1, x_2 ,x_3, ... X_n} donde

$$x_0 = a < x_1 < x_2 <\ldots < x_n = b$$

Decimos que una partición P es más fina que una partición P’ si P’ $\subset$ P

SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

Sea f una función continua y positiva en $[x_{i-1}, x_i]$, llamaremos M_i y m_i a los valores máximo y mínimo que toma la función en ese intervalo, la existencia de esos valores está garantizada por que toda función continua alcanza su máximo y mínimo en un intervalo cerrado. $m_i \le f(xi) \le M_i$

Para calcular el área procedermeos del siguiente modo

Definimos una sucesión de particiones $P_1, P_2, P_3, ..P_n$, tales que la distancia entre dos de sus puntos consecutivos tienda a 0. $x_i - x_{i-1} \longrightarrow 0$

Se llama **suma superior** de la función f asociada a la partición P, y se designa por S(f, P) al siguiente número real:

$$S(f,P) = (x_1-x_0)\, M_1 + (x_2-x_1)\, M_2 + ... + (x_n - x_{n-1})\, M_n.$$

Se llama **suma inferior** de la función f asociada a la partición P, y se designa por I(f, P) al siguiente número real:

$$I(f,P) = (x_1-x_0)\, m_1 + (x_2-x_1)\, m_2 + ... + (x_n - x_{n-1})\, m_n$$

Evidentemente $I(f,P) \le S(f,P)$

INTEGRAL DE RIEMANN DE UNA FUNCIÓN

Partiendo de la desigualdad anterior podemos seguir el razonamiento dentro de una partición P del intervalo [a, b]

Tomaremos un punto c_i en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i.]$, entonces $m_i \le f(c_i) \le M_i$ además sabemos que $x_i - x_{i-1} \to 0$ lo que hace que $m_i \to M_i$
Por lo tanto:

$$I(f,P) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1}) \le S(f,P)$$

por lo que el área buscada está comprendida entre I(f,P) y S(f,P)

$$I(f,P) \le \text{Área} \le S(f,P) \quad (1)$$

A continuación obtendremos el término general de la sucesión:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

y dado que $(x_i - x_{i-1}) \to 0$ es evidente que

$$\lim_{n\to\infty} I(f,P) = \lim_{n\to\infty} S(f,P)$$

Por la desigualdad obtenida en (1) sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} I(f,P) \le \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} S(f,P)$$ por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int f(x)\, d$$

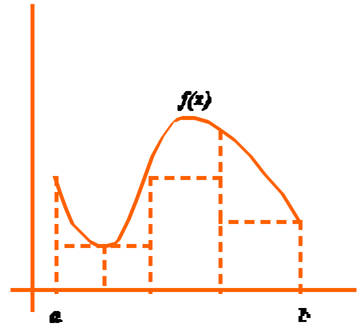
a este límite se le dio el nombre de:

integral de Riemann o simplemente **INTEGRAL DEFINIDA**
de la función f en en el intervalo [a, b].

En su verdadera extensión la integral de Riemann se define no sólo para funciones continuas sino para funciones donde no se puede asegurar la existencia del máximo o del mínimo; se trabaja entonces con la idea del supremo o del ínfimo de una función.

Interpretación geométrica de la integral definida

La integral definida de f(x) entre x= a, y x= b, siendo $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$ es el área encerrada entre la función f(x), y las rectas x =a, x= b, y el eje OX.



PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ cualquiera que sea f.

2.- Si $f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Si f(x) < 0 en todo el intervalo [a,b] entonces $\int_a^b f(x)\,dx < 0$

3.- Si f es continua en [a,b] y a < c < b entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

4.- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)+g(x)\,dx$

5.- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall k$

6.- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Enunciado:

Sea f(x) una función continua en [a, b] entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

es derivable y se verifica que F'(x) = f(x)

Demostración:

Queremos calcular $F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$

En el intervalo [x, x+h] tomamos los valores máximo y mínimo de f(x), que los alcanza por ser continua en el cerrado, a los que denotaremos por M y m.

Entonces m · h # $\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$ # M · h, de lo que deducimos que

m # $\dfrac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h}$ # M pero si h—>0

los valores de m y M tienden a juntarse por lo que $\dfrac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h}$ —> f(x)

De donde F'(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$ = $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}{h}$ = f(x)

que es el resultado buscado.

REGLA DE BAROW

Enunciado:

Sea f(x) una función continua en [a, b] y G(x) = $\int f(x)\,dx$ una primitiva de f(x)

entonces se verifica que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ = G(b) - G(a)

Demostración:

En virtud del teorema fundamental del cálculo sabemos que F(x) = $\int_{a}^{b} f(t)\,dt$ es una primitiva de f(x), (porque F'(x) = f(x))

Si G(x) es otra primitiva de f (x) entonces F(x) = G(x) + K

Si sustituimos x por a entonces F(a) = G(a) + K pero F(a) = $\int_{a}^{a} f(t)\,dt$ = 0 por lo tantoG(a) + K = 0

Sustituyendo ahora x= b tenemos que F(b) = = G(b) + K = G (b) - G(a) y tambien

F(b) = $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ por lo tanto deducimos que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ = G(b) - G(a)

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Enunciado:

Sea f(x) una función continua en [a, b]; entonces existe c 0 (a,b) tal que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx =$ f(c) · (b - a)

Demostración:

Sean M y m los valores máximo y mínimo, respectivamente, que toma la función en el intervalo [a, b]. Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la integral definida como el área del recinto limitado por la curva, el eje OX, y las abcisas x = a y x = b, se verifica:

m (b - a) # $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ # M (b - a)

o de otra forma m # $\dfrac{\int_{a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$ # M

Como f es una función continua en un cerrado [a, b] toma todos los valores entre m y M por lo que deducimos que existe c 0 (a,b) tal que $\dfrac{\int_{a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$ = f(c) por lo tanto $\int_{a}^{b} f(x)\,dx =$ f(c)·(b - a)