ESPACIOS VECTORIALES

Un conjunto V junto con dos operaciones + y · decimos que **(V , + , ·) es un espacio vectorial sobre R** si verifica las siguientes propiedades:

La suma es una **operación interna** : œ u, v 0 V   u + v 0 V
(elementos de V al sumarlos entre sí dan como resultado elementos de V).
+ es **asociativa** : (u + v) + w = u + (v + w) œ u , v , w 0 V
› è **elto. neutro** de la suma: è+ u = u + è œ u 0 V
› (- u) **elto. opuesto** de u : (- u) + u = u + (- u) = è œ u 0 V
+ es **conmutativa**: u + v = v + u œ u ,v 0 V

El producto es una operación externa œ ë 0 R y œ u 0 V ë · u 0 V
(elementos de V multiplicados por escalares dan como resultados elementos de V)
1) œ ë , µ 0 R y œ u 0 V (ë + µ) · u = ë · u + µ · u
2) œ ë 0 R y œ u , v 0 V ë · (u + v) = ë · u + ë · v
3) œ ë , µ 0 R y œ u , 0 V ë · (µ · u) = (ë · µ) · u
4) œ u 0 V , 1 0 R u · 1 = 1 · u = u
Los elementos de V se llaman **vectores** y los elementos de R se llaman **escalares**.

Subespacios vectoriales
Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto U de V , no vacio , decimos que es un subespacio vectorial de V cuando es espacio vectorial con las operaciones definidas en V. Entre los subespacios de V están los dos llamados triviales, el formado sólo por el è , { è } y el propio V. A los otros les llamaremos subespacios propios o simplemente subespacios de V .

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto U de V sea un subespacio vectorial es que se verifique:
1) œ u , v 0 U u + v 0 U   2) œ ë 0 R, œ u 0 U ë · u 0 U

Combinaciones lineales
Decimos que v 0 V es una combinación lineal de u_1, u_2, u_3 , . . . u_n , n vectores de un espacio vectorial real V si v se puede expresar de la forma:
v = $ë_1$ · u_1 + $ë_2$ · u_2 + $ë_3$ · u_3 + ...+ $ë_n$ · u_n con $ë_1$, $ë_2$, $ë_3$, · · · $ë_n$ 0 R

Vectores linealmente independientes.
Un conjunto de vectores {u_1, u_2, u_3, ..., u_n } de un espacio vectorial V decimos que son linealmente independientes si:
œ $ë_1$ · u_1 + $ë_2$ · u_2 + $ë_3$ · u_3 + ...+ $ë_n$ · u_n = 0 se verifica que $ë_1$ = $ë_2$ = $ë_3$ = · · · = $ë_n$ = 0

Vectores linealmente dependientes
Un conjunto de vectores {u_1, u_2, u_3, ..., u_n } de un espacio vectorial V decimos que son linealmente dependientes si › $ë_1$, $ë_2$, $ë_3$, · · · $ë_n$ 0 R no todos iguales a cero tal que :
$ë_1$ · u_1 + $ë_2$ · u_2 + $ë_3$ · u_3 + ...+ $ë_n$ · u_n = 0

Sistema de generadores
Decimos que { u_1, u_2, u_3, ..., u_n } es un sistema de generadores de V si:
œ v 0 V › $ë_1$, $ë_2$, $ë_3$, · · · $ë_n$ 0 R tal que v = $ë_1$ · u_1 + $ë_2$ · u_2 + $ë_3$ · u_3 + ...+ $ë_n$ · u_n

Base
Un conjunto de vectores de V, B= {u_1, u_2, u_3, ..., u_n } decimos que es una base de V si es un conjunto de generadores de V y linealmente independientes.

Dimensión

Dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores que hay en la base.

Propiedades y teoremas

1 El elemento neutro de un espacio vectorial es único. (Si hubiera dos, coincidirían)

3 Cada vector tiene un único opuesto. (Si tuviera dos, coincidirían)

5 El elemento neutro del espacio vectorial es también el neutro de todos sus subespacios. Por lo tanto dos subespacios cualesquiera nunca tienen como intersección el conjunto vacio.

7 Si S' = $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_r\}$ es un subconjunto no vacío de S = $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ formado por vectores linealmente independientes entonces $u_1, u_2, u_3, ..., u_r$ son también vectores linealmente independientes, siendo r # n

> Si $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes entonces $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ también lo es., siendo r # n

N Los vectores de S = $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ son linealmente dependientes si y sólo si al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

S El vector cero, è, es siempre linealmente dependiente.

H Sea S = $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_r\}$ un conjunto cualquiera de vectores de V; el conjunto formado por todas sus combinaciones lineales es un subespacio vectorial de V. Lo designaremos subespacio generado por S y lo denotaremos como < S > o por $< u_1, u_2, u_3, ..., u_n >$

= Una base está siempre formada por el mayor número posible de vectores linealmente independientes y por el menor número de generadores necesarios para generar V.

9 La dimensión de un espacio vectorial coincide con el número máximo de vectores l. independientes que podemos encontrar en un espacio vectorial y por el mínimo número de vectores generadores necesario para generar V.

G Si U es un subespacio vectorial de V y la dim U = r, entonces todo conjunto de r vectores l. independientes de U es una base de U.

J Si U es un subespacio vectorial de V y la dim U = r, entonces todo conjunto de r vectores generadores de U es una base de U

X Teorema de la base. Sea V un espacio vectorial y sean B = $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ y B' = $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_r\}$ dos bases de V; entonces r = n

Rango de un conjunto de vectores

Sea S = $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ llamamos rango de S al número máximo de vectores l. independientes que podemos encontrar en S. (Coincide con la dimensión del subespacio generado por S). Si W = < S > entonces rg (S) = dim W.