

Protocolo para la resolución de integrales racionales

1.- Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, se hace la división $D = d \times c + r$, entonces

$$\int \frac{D}{d} dx = \int \frac{d \times c + r}{d} dx = \int \frac{d \times c}{d} + \frac{r}{d} dx = \int c + \frac{r}{d} dx = \int c dx + \int \frac{r}{d} dx$$

la integral racional que nos queda ahora tiene el numerador con menor grado que el denominador y ya se le pueden aplicar métodos de integración.

2.- Partimos de que el grado del numerador ya es menor que el del denominador, lo primero es comprobar si el numerador puede ser, o es, la derivada del denominador en este caso tendremos como

resultado el logaritmo neperiano del denominador (o casi) $\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + C$

3.- Si no puede ser este el resultado estudiamos las raíces del denominador

- a) Raíces reales y distintas. Método fracciones simples.
- b) Raíces reales múltiples (repetidas). Método fracciones simples.
- c) Raíces complejas simples Método logaritmo neperiano y arcotangente.
- d) Raíces reales y, complejas simples. Método fracciones simples.
- e) Raíces complejas múltiples Método Hermite.

Método de Hermite

Para resolver $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $Q(x)$ tiene raíces múltiples, reales o complejas, el método de Hermite nos

permite transformar la integral en otra donde el denominador sólo tenga raíces simples, aunque para resolver el caso de raíces reales múltiples no es apropiado por ser demasiado laborioso, y sea más aconsejable resolverlo directamente por el método de fracciones simples.

Calculamos la derivada de $Q(x)$: $Q'(x)$

Calculamos $Q_2(x) = \text{m.c.d. } \{Q(x), Q'(x)\}$.

Construimos un polinomio que tenga todos sus factores con exponente 1, por lo que sus raíces serán

todas distintas $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$

Entonces $\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \right]' + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ donde $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son polinomios por determinar que

tienen un grado menos que $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ respectivamente. Por lo que la integral inicial se convierte en la integral de un cociente con raíces simple en el denominador.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \right]' + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Protocolo para la integración por partes

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Casos generales para aplicar integración por partes

1) $\int \text{pol} \times \exp dx$

$$\text{Pol} = u \quad \exp dx = dv$$

Se aplica tantas veces como grado tiene el polinomio

2) $\int \text{pol} \times (\text{sen} x \text{ o } \text{cos} x) dx$

$$\text{Pol} = u \quad (\text{sen} x \text{ o } \text{cos} x) dx = dv \quad \text{Se}$$

aplica tantas veces como grado del polinomio

3) $\int \text{pol} \times \ln dx$

$$\ln = u \quad \text{Pol} dx = dv$$

Se aplica tantas veces como grado tiene el logaritmo

4) $\int (\text{sen} x \text{ o } \text{cos} x) \times \exp dx$

Da igual a quien se le llame u o dv

Se aplica dos veces y se cambia de miembro la integral que aparece repetida al final del proceso

5) $\int \text{sen} \alpha \times \text{cos} \beta dx$ y similares

Da igual a quien se le llame u o dv

Se aplica dos veces y se cambia de miembro la integral que aparece repetida al final del proceso

6) $\int \text{arctg} x dx \quad \int \text{arcsen} x dx$

$$\text{arc} = u \quad dx = dv$$

Se aplica tantas veces como grado tiene el arco correspondiente