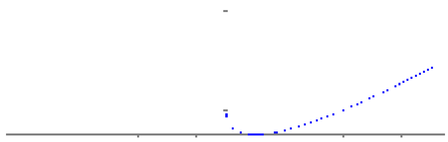
Calcular el volumen entre las superficies $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ $\qquad z^2 = 2xy$.

Es la gráfica de la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$



Como no tiene z en la ecuación significa que se prolonga indefinidamente por el eje z como si fuese una pared, te queda entonces un pequeño triángulo curvilineo entre los ejes de coordenadas y la curva con límites tanto para las x como para las y entre 0 y 1.
Al pasarla a 3D tienes una “habitación” con esas paredes verticales y el techo es la ecuación de $z^2 = 2xy$.
Dado que están en radicandos de raíces cuadradas x e y tienen que ser mayores o iguales a cero, y las raíces respectivas también son positivas pues sino tendría que indicarlo por lo tanto $0 \le x \le 1 \to 0 \le \sqrt{y} \le 1 - \sqrt{x}$ pero no vale tener así la raíz por lo tanto $0 \le x \le 1 \to 0 \le y \le (1-\sqrt{x})^2$

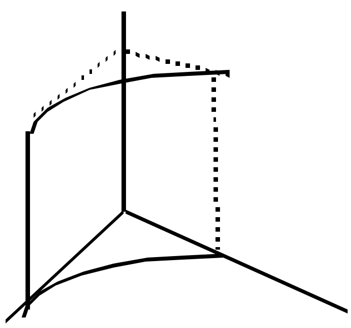
$$\int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{2xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{2}\sqrt{x}\,\sqrt{y}\,dy\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x} \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{y}\,dy\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{(1-\sqrt{x})^2} dx$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)^3\Big]_0^{(1-\sqrt{x})^2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{x}\left(\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}\right)^3 - \sqrt{0}^3\Big]dx =$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^3\Big]dx$$ creo que esta integral ya no tienes problema para resolverla.

(la ecuación es $z^2 = 2xy$ y sólo utilizamos la raíz positiva.)



Creo que este es el dibujo aproximado del ejercicio del primer ejercicio.
Falta dibujar el techo que sería $z^2 = 2xy$

Problema: Calcular la masa del cuerpo limitado por la esfera de radio 2 y la superficie $x^2 + y^2 - z^2 + 2 \leq 0$ sabiendo que la densidad es constante y vale ñ = z+3

En principio se puede pensar que pensé que dM = ñ dV pero entonces ñ no sería constante pues en dV interviene dz y por lo tanto es variable
La superficie es un hiperboloide de dos hojas. La forma sería algo parecido a la figura 3 so lo intersecamos con una esfera y se obtendría algo parecido a la figura 4 . Después habría que multiplicar por 2 el resultado por la simetría de la figura.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 - z^2 + 2 \leq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - z^2 + 2 = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{por reducion}}{\Rightarrow} \left.2x^2 + 2y^2 = 2\right\} \Rightarrow \left.x^2 + y^2 = 1\right\}$$

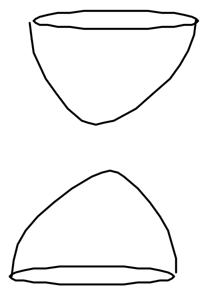


Figura 3

Que es la circunferencia de corte entre las dos superficies. Pasando a coordenadas cilíndricas tenemos que

$0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ a mayores tendremos que multiplicar por cuatro ya que sólo trabajamos con el diedro positivo (En total junto con la multiplicación por 2 de la simetría de la figura con respecto al plano z=0 tendremos que multiplicar por 8 el resultado de la integral)
Dado que la esfera va por encima y el hiperboloide va por abajo las z varían entre las dos

$\sqrt{x^2 + y^2 + 2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Pasando a coordenadas polares dará $\sqrt{r^2 + 2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$

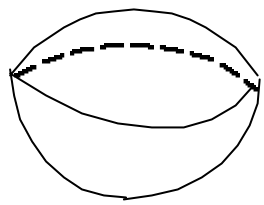


Figura 4

(todo estaría bien,eso creo , si no fuera por el problema de que de esta manera la z no es constante).