$$\int \frac{3x-7}{x^2-4x+9}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador en este caso son imaginarias $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{2}$, nos conviene para tener una autocoprobación seguir desarrollando ese cociente, $x = 2 \pm \sqrt{-5}$

los números que aparecen en la solución de la ”x” aparecera´n en el denominador de la integral al buscar cuadrados perfectos

Lo primero es conseguir el ln y después el arctangente, para ello “rompemos la integral en dos sumandos” el que tendrá la x en el numerador y el que no la tendrá; del primero obtendremos el ln y cuando lo hayamos conseguido buscaremos el arctangente con lo que nos quede.

$$\int \frac{3x-7}{x^2-4x+9}\,dx \overset{1}{=} \int \frac{3x\,dx}{x^2-4x+9} - 7\int \frac{dx}{x^2-4x+9} \overset{2}{=} \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-4x+9} - 7\int \frac{dx}{x^2-4x+9}$$

la primera igualdad fue para separar las “x” del término independiente

la segunda igualdad fue para buscar la derivada de x^2 por lo que multiplicamos dentro por dos y dividimos fuera

$$\overset{3}{=} \frac{3}{2}\int \frac{2x-4+4}{x^2-4x+9}\,dx - 7\int \frac{dx}{x^2-4x+9} \overset{4}{=} \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+9}\,dx + \frac{3}{2}4\int \frac{dx}{x^2-4x+9} - 7\int \frac{dx}{x^2-4x+9}$$

en la tercera igualdad buscamos la derivada de -4x (para tener el -4 también colocamos el +4, y así el resultado no varía)

la cuarta igualdad volvemos a romper la integral para tener la derivada “exacta” del denominador (ojo con el 3/2 que multiplica también al término independiente)

$$\overset{5}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+9) + 6\int \frac{dx}{x^2-4x+9} - 7\int \frac{dx}{x^2-4x+9} \overset{6}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+9) - \int \frac{dx}{x^2-4x+9}$$

en la quinta igualdad resolvemos la primera integral

en la sexta igualdad operamos dos integrales que nos quedan

$$\overset{7}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+9) - \int \frac{dx}{(x-2)^2+5} \overset{8}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+9) - \int \frac{dt}{t^2+5} \overset{9}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+9) - \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{artg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C$$

en la séptima buscamos el cuadrado perfecto

en la octava hacemos un cambio de variable (optativo)

en la novena ya estamos en un caso anterior y más sencillo por lo que resolvemos directamente

$$\int \frac{3x-7}{x^2-4x+9}\,dx \overset{10}{=} \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+9) - \frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{(x-2)}{\sqrt{5}} + C\,.$$

(Un buen ejercicio de derivadas es derivar el resultado obtenido y llegar al de la integral inicial)