

$\int \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 9} dx$ Calculamos las raíces del denominador en este caso son

imaginarias $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{2}$, nos conviene para tener una

autocoprobación seguir desarrollando ese cociente, $x = 2 \pm \sqrt{-5}$

los números que aparecen en la solución de la "x" aparecerán en el denominador de la integral al buscar cuadrados perfectos

Lo primero es conseguir el ln y después el arctangente, para ello "rompemos la integral en dos sumandos" el que tendrá la x en el numerador y el que no la tendrá; del primero obtendremos el ln y cuando lo hayamos conseguido buscaremos el arctangente con lo que nos quede.

$$\int \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 9} dx = \int \frac{3x dx}{x^2 - 4x + 9} - 7 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} = \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 - 4x + 9} - 7 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9}$$

la primera igualdad fue para separar las "x" del término independiente

la segunda igualdad fue para buscar la derivada de x^2 por lo que multiplicamos dentro por dos y dividimos fuera

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 9} dx - 7 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} = \frac{3}{2} \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 9} dx + \frac{3}{2} \int \frac{4 dx}{x^2 - 4x + 9} - 7 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9}$$

en la tercera igualdad buscamos la derivada de $-4x$ (para tener el -4 también colocamos el $+4$, y así el resultado no varía)

la cuarta igualdad volvemos a romper la integral para tener la derivada "exacta" del denominador (ojo con el $3/2$ que multiplica también al término independiente)

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 9) + 6 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} - 7 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 9) - \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 9}$$

en la quinta igualdad resolvemos la primera integral

en la sexta igualdad operamos dos integrales que nos quedan

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 9) - \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 5} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 9) - \int \frac{dt}{t^2 + 5} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 9) - \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{artg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C$$

en la séptima buscamos el cuadrado perfecto

en la octava hacemos un cambio de variable (optativo)

en la novena ya estamos en un caso anterior y más sencillo por lo que resolvemos directamente

$$\int \frac{3x - 7}{x^2 - 4x + 9} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{artg} \frac{(x-2)}{\sqrt{5}} + C.$$

(Un buen ejercicio de derivadas es derivar el resultado obtenido y llegar al de la integral inicial)