Coordenadas de un punto en el espacio

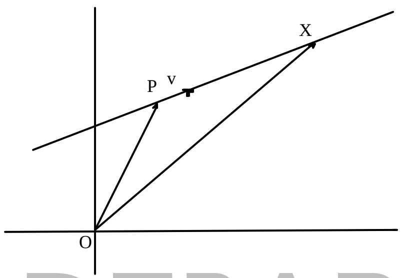
I.E.S. GUITIRIZ DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS

Sea U ={ O, u_1, u_2, u_3} entonces:

a) Si A es un punto arbitrario del E3, se llama vector de posición del punto A al vector $\overline{OA}$. De tal forma que si (x,y,z) son las coordenadas del punto A, entonces $\overline{a} = x\,\overline{u_1} + y\,\overline{u_2} + z\,\overline{u_3}$, es decir que las coordenadas del punto coinciden con las de su vector de posición respecto a la base correspondiente.

b) Si A(x_1, y_1, z_1) y B(x_2, y_2, z_2) son dos puntos arbitrarios de E_3 y $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son sus respectivos vectores de posición respecto de la base correspondiente; entonces $\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$ en consecuencia $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\overline{u_1} + (y_2 - y_1)\,\overline{u_2} + (z_2 - z_1)\,\overline{u_3}$ .Es decir, las coordenadas del vector $\overline{AB}$ respecto a la base B = {u_1,u_2,u_3} son las coord. cartesianas del punto B menos las coordenadas cartesianas del punto A

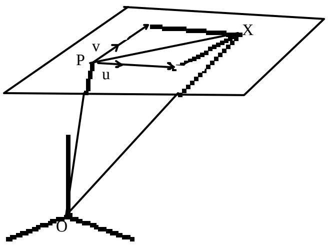
La recta en el espacio afín



Sea P un punto del espacio afín y un vector libre no nulo. La recta que pasa por P y tiene la dirección del vector $\overline{v}$ se define como el conjunto de todos los puntos X del espacio tales que $\overline{PX} = \lambda\,\overline{v}$ con $\lambda \in$ E

Calcular las ecuaciones paramétricas, continua e implícita o cartesianas de la recta.

El plano en el espacio afín



Sea P un punto del espacio afín y dos vectores libres $\overline{u}$ y $\overline{v}$ linealmente independientes, por lo tanto son no nulos y no son proporcionales. El plano determinado por P y por los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es el conjunto de puntos X del espacio afín para los que existen números reales s y t tales que $\overline{PX} = s\,\overline{u} + t\,\overline{v}$.

Posiciones relativas

Dos planos: π: Ax + By + Cz + D = 0

π': A'x + B'y + C'z + D' = 0

$$M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

Si rang (M) = 1 y rang(M´) = 1 los planos coinciden (son el mismo).
Si rang (M) = 2 y rang(M´) = 2 los planos se cortan en una recta.
Si rang (M) = 1 y rang(M´) = 2 los planos son paralelos no coincidentes.

Dado que tenemos tres incógnitas y sólo dos ecuaciones el rang(M´) siempre será menor por lo que nunca se cortarán en un solo punto.

Tres planos π: Ax + By + Cz + D = 0

π': A'x + B'y + C'z + D' = 0

π'': A''x + B''y + C''z + D'' = 0

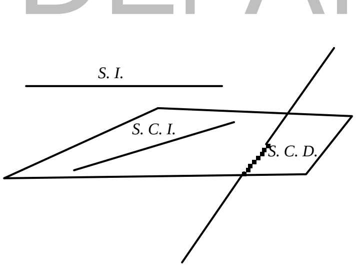
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A´ & B´ & C \\ A´´ & B´´ & C´´ \end{pmatrix} \qquad M´ = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A´ & B´ & C´ & D´ \\ A´´ & B´´ & C´´ & D´´ \end{pmatrix}$$

Si rang (M) = 1 y rang (M´) = 1 los planos coinciden (son el mismo).
Si rang (M) = 2 y rang (M´) = 2 los planos se cortan en una recta.
Si rang (M) = 3 y rang (M´) = 3 los planos se cortan en un punto.
Si rang (M) = 1 y rang (M´) = 2 los planos son paralelos no coincidentes.
Si rang (M) = 2 y rang(M´) = 3 los planos pueden adoptar dos posiciones

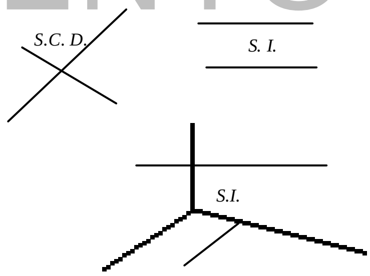
Un plano y una recta π: Ax + By + Cz + D = 0 $\quad r: \begin{cases} A´x + B´y + C´z + D´ = 0 \\ A´´x + B´´y + C´´z + D´ = 0 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A´ & B´ & C \\ A´´ & B´´ & C´´ \end{pmatrix} \qquad M´ = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A´ & B´ & C´ & D´ \\ A´´ & B´´ & C´´ & D´´ \end{pmatrix}$$

Si rang (M) = 1 y rang (M´) = 1 nunca puede darse este caso.
Si rang (M) = 2 y rang (M´) = 2 el plano contiene a la recta. S. C. I..
Si rang (M) = 3 y rang (M´) = 3 el plano y la recta se cortan en un punto. S. C. D.
Si rang (M) = 2 y rang (M´) = 3 la recta es paralela al plano. S. I.



Plano y recta



Dos rectas

Dos rectas

$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D´ = 0 \\ A´x + B´y + C´z + D´ = 0 \end{cases} \qquad r´: \begin{cases} A´x + B´y + C´z + D´ = 0 \\ A´´x + B´´y + C´´z + D´ = 0 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A´ & B´ & C´ \\ A´´ & B´´ & C´´ \\ A´´´ & B´´´ & C´´´ \end{pmatrix} \qquad M´ = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A´ & B´ & C´ & D´ \\ A´´ & B´´ & C´´ & D´´ \\ A´´´ & B´´´ & C´´´ & D´´´ \end{pmatrix}$$

I.E.S. GUITIRIZ DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS

Si rang (M) = 2 y rang (M´) = 2 las dos rectas coinciden. S. C. I..
Si rang (M) = 3 y rang (M´) = 3 las dos rectas se cortan en un punto. S. C. D.
Si rang (M) = 2 y rang (M´) = 3 las dos rectas son paralelas. S. I.
Si rang (M) = 3 y rang (M´) = 4 las dos rectas se cruzan. S.I.

Haz de planos:

Dada una recta r, se define el haz de planos de arista r al conjunto de los planos que contienen a la recta. Se suele expresar de la siguiente forma ëð + ð´ = 0

Dados dos vectores de R^3 llamaremos **producto escalar u·v** = (a,b,c) ·(e,f,g) = a·e + b·f + c·g

Definimos **módulo** de un vector como |u| = $\sqrt{u \cdot u}$

También se verifica que u·v = |u| |v| cosá siendo á el ángulo agudo que forman u y v
Definimos dos **vectores ortogonal**es u y v si u · v = 0
Un vector es **unitario** o normal si |u| =1
Una **base** de vectores se dice que es **ortonormal** si está formada por vectores ortogonales y unitarios. Utilizaremos la notación para una base ortonormal de R^3 {i,j,k} o también $\{u_1,u_2,u_3\}$
Para conseguir un vector unitario basta dividirlo por su módulo (se dividirá cada una de sus componentes).
Se define el **producto vectorial** de dos vectores u = (a, b, c) y v = (e, f, g) al **vector**

u x v = (a f - e b , c e - a g , a f - e b) que coincide con el desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix}$

El módulo del producto vectorial es:
| u x v! = | u | · | v | ·sen á .
El módulo del producto vectorial coincide con la superficie del paralelogramo cuyos lados son los dos vectores S = b · h = |v| · h

Como $sen\ á \ ' \ \frac{h}{|u|}$ entonces h = |u| sen á

por lo tanto S = | u| | v | · sen á = | u x v |

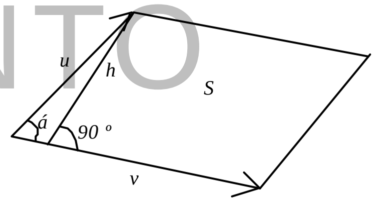


Figura 1

Se define el **producto mixto** de tres vectores u, v, w al **escalar** resultante de (u x v) · w que coincide con el resultado de

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & pk \end{vmatrix}$ siendo el vector w = (m, n, p).

El valor absoluto del producto mixto de u v w coincide con el volumen del prisma que ellos forman. V = S · h siendo
S = | u x v | y h = | w | · cos á
por lo tanto V = | u x v | · | w | cos á = (u x v) · w
Dado el plano ð: A x + B y + C z + D = 0 llamaremos vector director del plano al vector (A,B,C). Comprobar que es un vector normal al plano. Podremos tomar (A, B, C) = u x v

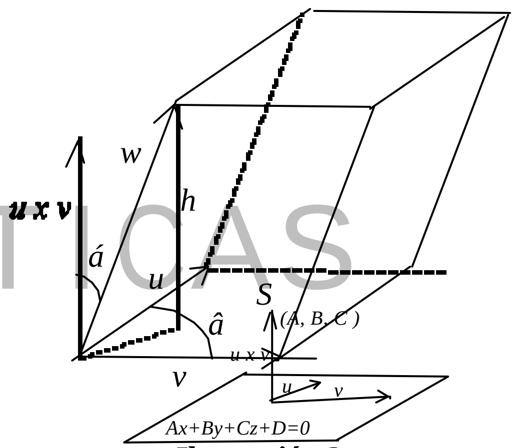


Ilustración 2
Ilustración 3

I.E.S. GUITIRIZ DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS

I.E.S. GUITIRIZ DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS

Ángulo de dos vectores $\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$

Ángulo de dos rectas $\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$ siendo u y v los vectores directores de ellas

Ángulo de dos planos $\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$ siendo u y v los vectores directores de los dos planos

Ángulo de recta y plano $\operatorname{sen} \alpha = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$ siendo u el vector director de la recta y v el vector director del plano.

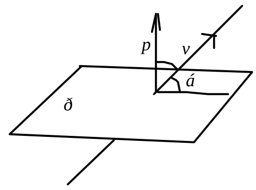


Ilustración 4

Dos planos son perpendiculares cuando sus vectores directores son ortogonales.
Una recta y un plano son perpendiculares si sus vectores son ortogonales.

Definimos **distancia entre dos puntos** como:

$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ siendo **a** y **b** los vectores asociados a los puntos A y B.

Distancia de un punto a una recta es la menor de las distancias del punto a todos los puntos de la recta. Coincide con la distancia en perpendicular desde el punto a la recta.

De la fórmula de la superficie de un paralelogramo podemos despejar h siendo $h = \frac{|u \times v|}{|v|}$, dado que la altura del paralelogramo es la distancia del vértice a al base, tenemos que la distancia de un punto a una recta viene dada por d(P, r)= $\frac{|AP \times v|}{|v|}$ donde A es un punto cualquiera de la recta P el punto dado y v el vector director de la recta. ver ilustración 1

Distancia entre un punto P a un plano es la distancia más corta desde el punto P a cualquiera de los puntos del plano. (Coincide con la distancia a la proyección ortogonal desde el punto P al plano). d (P, ð) = h = $\frac{V_v}{S}$ $\frac{(u \times v) \cdot w}{|u \times v|}$ (ver ilustración 2)

Si el plano viene dado en su forma cartesiana entonces la distancia del punto P (a,b,c) al plano

A x + B y + C z + D = 0 será $d(P, \pi) = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Distancia de una recta a un plano, es la menor de las distancias desde cualquier punto de la recta a cualquier punto del plano. Si la recta corta al plano entonces la distancia es cero, si la recta es paralela al plano su distancia coincide con la de cualquiera de sus puntos al plano.

Distancia entre dos planos, por el mismo razonamiento, es cero si no son paralelos , en caso de serlo se calcula la distancia de un punto cualquiera de un plano al otro plano.

Distanica entre rectas paralelas, coincide con la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra.

Volumen del prisma: Como ya vimos coincide con el valor absoluto del producto mixto de tres vectores, que formarían sus aristas.

Volumen del tetraedro: Es la sexta parte del producto mixto de tres vectores que formarían sus aristas concurrentes en un punto.

I.E.S.
GUITIRIZ
DEPARTAMENTO
MATEMÁTICAS