Ejercicio 3.2 $f(x) = \begin{cases} (x-2)\,arctag\,\dfrac{1}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 0 & si\ x = 2 \end{cases}$

Posibles puntos de discontinuidad: x= 2 porque hay cambio de función (para los iguales es de una forma y para los distintos de otra) y también x =2 por ser el valor que anula un cociente. En el resto la función es continua y derivable por ser resta, producto, composición y cociente de funciones continuas y derivables con denominador distinto de cero.

f continua y derivable en $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

Para estudiar los límites en x=2 utilizaremos la fórmula con $h \to 0$ por ser el ejercicio con x …

Descomponemos la función en $f(x) = \begin{cases} (x-2)\text{artag}\dfrac{1}{x-2} & \text{si} & x < 2 \\ (x-2)\text{artag}\dfrac{1}{x-2} & \text{si} & 2 < x \end{cases}$

Estudiamos el límite por la izquierda de x=2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x-2)\text{artag}\frac{1}{x-2} = \lim_{h\to 0}(2-h-2)\text{artag}\frac{1}{2-h-2} =$$

$$\lim_{h\to 0}(-h)\ \text{artag}\frac{1}{-h} = (-0)\ \text{artag}(-\infty) = 0\ (-\frac{\pi}{2}) = 0$$

Estudiamos el límite por la derecha de x=2

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-2)\text{artag}\frac{1}{x-2} = \lim_{h\to 0}(2+h-2)\text{artag}\frac{1}{2+h-2} =$$

$$\lim_{h\to 0}(h)\ \text{artag}\frac{1}{h} = (0)\ \text{artag}(\infty) = 0\ (\frac{\pi}{2}) = 0$$

Por lo tanto la función es continua en x= 2

Veamos la derivabilidad en x=2. Seguimos utilizando la forma con $h \to 0$

$$f'(2)^- = \lim_{h\to o}\frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = \lim_{h\to o}\frac{(2-h-2)\text{artag}\dfrac{1}{(2-h-2)} - 0}{-h}$$

$$\lim_{h\to o}\frac{(-h)\text{artag}\dfrac{1}{(-h)} - 0}{-h} = \lim_{h\to o}\frac{\text{artag}\dfrac{1}{(-h)}}{1} = \text{artag}\frac{1}{(-0)} = \text{artag}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f'(2)^+ = \lim_{h\to o}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to o}\frac{(2+h-2)\text{artag}\dfrac{1}{(2+h-2)} - 0}{h}$$

$$\lim_{h\to o}\frac{(h)\text{artag}\dfrac{1}{(h)} - 0}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\text{artag}\dfrac{1}{(h)}}{1} = \text{artag}\frac{1}{(0)} = \text{artag}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto no es derivable en x=2 dado que son distintas las derivadas por la izda y por la derecha

(Hay un resultado interesante, aunque no es derivable por ser distintas, el hecho de que sean dos números (ninguna de las dos derivadas es infinito o no existe) la función es continua, aunque ya lo sabíamos).

Ejercico 3.10 $\qquad f(x)\ '\ \dfrac{|e^{x}\ \&\ 1!}{e^{x}}$

En primer lugar descompondremos la función valor absoluto, el valor que hace cambiar la función es la solución de la ecuación $e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \ x = 0$ por lo tanto si $x < 0$ el resultado de $e^x - 1$ es negativo y cambia el signo

si $x > 0$ el resultado de $e^x - 1$ es positivo y el signo se mantiene por lo que

$$|e^x - 1| = \begin{cases} -e^x + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

con esto $f(x) = \dfrac{|e^x - 1|}{e^x} = \begin{cases} \dfrac{-e^x + 1}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

al ser dos expresiones distintas por la izda y por la dcha de x = 0 trabajamos los límites con la expresión de las x

$$f(0) = \frac{e^0 - 1}{e^0} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-e^x + 1}{e^x} = \frac{-e^0 + 1}{e^0} = \frac{-1+1}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{e^0 - 1}{e^0} = \frac{1-1}{1} = 0$$

La función es continua en x= 0

Estudiaremos la derivabilidad

$$f'(0)^- = \lim_{x \to o^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to o} \frac{\dfrac{-e^x + 1}{e^x} - 0}{x} = \frac{0}{0}$$

aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x \to o} \frac{\dfrac{-\ e^x e^x - e^x(-e^x + 1)}{(e^x)^2}}{1} = \lim_{x \to o} \frac{\dfrac{-\ e^x}{(e^x)^2}}{1} = \lim_{x \to o} \frac{-1}{e^x} = \frac{-1}{e^0} = -1$$

$$f'(0)+ = \lim_{x \to o^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to o} \frac{\dfrac{e^x - 1}{e^x} - 0}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to o} \frac{\dfrac{e^x e^x - e^x(e^x - 1)}{(e^x)^2}}{1} = \lim_{x \to o} \frac{\dfrac{e^x}{(e^x)^2}}{1} = \lim_{x \to o} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = 1$$

Por lo tanto la función no es derivable en x = 0

(Aunque si sería continua por dar las dos derivadas números finitos).

Ejercicio 3.14 $g(x)$ ' $\begin{cases} \dfrac{(x \% 1)^{\frac{1}{2}} \& 1}{x} & si\ x < 0 \\ sen(ax \% b) & si\ 0 \# x \# \dfrac{ð}{2} \\ e^{x \& (\frac{ð}{2})} & si\ x > \dfrac{ð}{2} \end{cases}$

La función tenemos que estudiarla en x=0, x= ð/2, y además estudiar el domino de $(x+1)^{1/2} = \sqrt{x+1}$
El domino para esa raíz es el conjunto[-1, 4). Además el cociente no tiene problemas en x=0 a pesar del denominador porque está definido para los x < 0.
Por lo tanto g(x) es continua en [-1, 0) c (0, ð/2) c (ð/2,4)
y g(x) es derivable en (-1, 0) c (0, ð/2) c (ð/2,4).

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$ Aplicamos L'Hopital $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} sen(a\ x+b) = sen(0+b) = sen\, b$ g (0) = sen (a 0 + b) = sen b

Para que sea continua en x =0 necesitamos que sen b = ½ Por lo tanto b =ð/6

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} sen(ax+b) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} sen(ax+\frac{\pi}{6}) = sen(a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} e^{x-\pi/2} = e^0 = 1$ Para que sea continua en x=ð/2 se necesita que 1 = $sen(a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$

aunque cabrían otras posibilidades resolvemos: $a\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} \Rightarrow a\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

con estos valores g(x) queda definida de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & si\ x < 0 \\ sen\left(\dfrac{4}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right) & si\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ e^{x-\pi/2} & si\ \dfrac{\pi}{2} < x \end{cases}$$