

1.1 Sea \mathbb{R}^2 el conjunto de pares ordenados de números reales, se define la suma de la forma usual $(x,y) + (x',y') = (x+x',y+y')$ ¿Con cuáles de los siguientes productos por escalares tendremos la estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} ?

a) $k(x,y) = (kx,y)$ b) $k(x,y) = (kx,0)$ c) $k(x,y) = (y,x)$ d) $k(x,y) = (kx^2,ky)$ e) $k(x,y) = (k^2x,k^2y)$.

1.2 En \mathbb{Q}^2 se define la suma usual de pares ordenados, y el producto se define de la forma usual pero siendo k un número real. ¿Es \mathbb{Q}^2 un \mathbb{R} -espacio vectorial? ¿Es \mathbb{Q}^2 un \mathbb{Q} -espacio vectorial?

1.3 Sea $P^2(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado 2 con coeficientes reales se definen la suma y el producto por escalares de la siguiente forma:

$(a+bX+cX^2) + (a'+b'X+c'X^2) = (a+a')+(b+b')X+(c+c')X^2$ $k(a+bX+cX^2) = ak+bkX+ckX^2$ ¿Es con estas dos operaciones un \mathbb{R} -espacio vectorial?

1.4 Si u,v,w son tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, ¿lo serán los vectores siguientes?: $u+2v-w$, $2u+v-3w$ y $u+v+w$.

1.5 Dados los vectores $u = (1,1,0,m)$, $v = (3,-1,n,-1)$ y $w = (-3,5,m,-4)$, hallar los valores de m y n para que dichos vectores sean dependientes.

1.6 Sean u,v,w tres vectores de un espacio vectorial de dimensión tres. Demostrar que si ellos son linealmente independientes también lo son: $u+v$, $u-v$, y $-2v+w$.

1.7 Sea $V = \mathbb{R}^3$, estudiar si son o no subespacios de v los siguientes conjuntos de vectores. En caso de ser subespacios encontrar una base de cada uno de ellos.:

- i) $W = \{(a,b,0) / a, b \in \mathbb{R}\}$ ii) $W = \{(a,b,c) / a + b + c = 0\}$
iii) $W = \{(a,b,c) / a = b + c\}$ iv) $W = \{(a,b,c) / a^2 + b^2 + c^2 > 1\}$
v) $W = \{(a,0,0) / a \in \mathbb{R}\}$ vi) $W = \{(a,b,c) / a,b,c \in \mathbb{R}\}$
vii) $W = \{(a,b,c) / a \neq 0\}$

1.8 Sea $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x+y-z = y+z-2t = 0\}$ y $W = \langle (1,-1,1,-1), (1,1,1,1), (-1,5,-1,5) \rangle$ Se

pide: Ecuaciones paramétricas y cartesianas de V , W , $V+W$, $V \cap W$

b) Descomponer el vector $v=(4,-3,2,1)$ en suma de dos vectores, uno de V y otro de W .

1.9 Sea $P_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada con grado menor o igual a 2. Sea M el subespacio generado por $\{x^2-1, x+1, 3x^2-7x-10\}$. Hallar una base de $P_2(x)$ que contenga a una base de M

1.10 Sea \mathbb{R}^3 espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios de él: $V = \{(a,b,c)/a \cdot b = 0\}$ $W = \{(a,b,c)/a,b \in \mathbb{Z}\}$ $T = \{(a,b,c)/a^2 = b\}$ $U = \{(a,b,c)/a + b + c = 3\}$

1.11 Dar las ecuaciones paramétricas y cartesianas del subespacio de \mathbb{R}^3 generado por los vectores $(-1,2,1)$; $(3,1,-1)$; $(-5,3,3)$; $(2,3,2)$

1.12 Dados los vectores: $(1,2,1,a)$; $(b,1,1,0)$; $(1,0,1,b)$ Calcular a y b para que sean dependientes

1.13 Sea T el subespacio de \mathbb{R}^3 engendrado por los vectores $(1,-1,0)$; y $(2,-2,5)$. Encontrar dos subespacios distintos suplementarios de T en \mathbb{R}^3 .

1.14 Se considera el espacio $M_2(\mathbb{R})$ y el subconjunto $N_2(\mathbb{R})$ cuyos elementos son de la

forma: $Aab \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \% b \end{pmatrix}$ Demostrar que: $N_2(\mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$. Encontrar una base de $N_2(\mathbb{R})$, y dar la dimensión. Calcular una base de $M_2(\mathbb{R})$ que contenga a la base anterior.

Calcular las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ en la base anterior del subespacio $N_2(\mathbb{R})$

1.15 Sea $P_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos. Si $M = \langle x^2 - 1, x + 1 \rangle$ es un subespacio vectorial de $P_2(x)$, encontrar una base de $P_2(x)$ que contenga a una base de M

1.16 Sean dos subespacios de \mathbb{R}^4 S y T calcula: ec. paramétricas y cartesianas de $S+T$, $S \cap T$
 $S = \{(x,y,z,t) / x+y-z = 0; 2x-y+t = 0\}$ $T = \langle (-1,2,1,1); (1,0,-1,1); (1,2,-1,3); (0,2,0,2) \rangle$

1.17 Dados $V = \{(x,y,z,t) / x-2y+z-3t=0, 2x+4y+z+t=0\}$ $U = \{(x,y,z,t) / x+2y=0, x+t=0\}$

- Comprobar que son subespacios vectoriales.
- Dar una base de cada uno de ellos y su dimensión
- Calcular $U+V$, $U \cap V$
- El vector $(-2,3,-3,2)$ descomponerlo como suma de un vector de U y otro de V .

1.18 En el espacio vectorial $P_3(x)$ se da el siguiente conjunto de vectores $S = \{1, x+1, (x+1)^2, x^3\}$

- Demostrar que S es una base de $P_3(x)$
- Dar las coordenadas del polinomio $2x^3 - 3x^2 + x + 4$ en esa base.

1.19 En \mathbb{R}^3 un vector tiene por coordenadas con respecto a la base canónica $(4,3,2)$ calcular las coordenadas de él con respecto a la base $B = \{(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)\}$

1.20 Calcula la matriz asociada al cambio de base en \mathbb{R}^3 siendo las bases
 $B_1 = \{(1,-2,3); (4,-1,0); (3,0,2)\}$; $B_2 = \{(2,2,1); (4,-1,0); (3,1,2)\}$

1.21 En \mathbb{R}^3 , un vector v tiene por coordenadas respecto a la base $B = \{(5,1,4); (2,1,3); (0,1,2)\}$ el vector $(5,1,-3)$. Hallar las coordenadas de v en la base compuesta por los vectores $(2,1,2); (-1,0,3); (4,3,0)$ y $(5,-2,3)$.

1.22 Sea T el subespacio generado por los polinomios $1+x+2x^2+x^3$ y $2-x^2+x^3$. Hallar las bases y dimensiones de T

1.23 Sean $U = \langle (1,0,1,0); (0,1,0,1) \rangle$ y $V = \langle (1,1,1,0); (1,-1,1,-1); (2,0,2,-1) \rangle$ Calcular: $U+V$, $U \cap V$ y también sus dimensiones y ecuaciones.

1.24 En el espacio vectorial $P_3(x)$ se da el siguiente conjunto de vectores

- Demostrar que $S = \{1, x+1, (x+1)^2, x^3\}$ es una base de $P_3(x)$
- Dar las coordenadas del polinomio $2x^3 - 3x^2 + x + 4$ en esa base.