

TEOREMA DE CAUCHY

Sean f y g continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) donde $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$ y $g(a) \neq g(b)$ entonces: $\exists c \in (a,b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{o también} \quad [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)$$

Newton- rapson

En las hipótesis del teorema se tienen m y M constantes tal que $m \leq |f'(x)|$ y $M \geq |f''(x)| \forall x \in [a,b]$ con ellas se verifica

$$\text{a) } |x_n - c| \leq \frac{f(x_n)}{m} \quad \text{b) } |x_n - c| \leq \frac{M}{2m} (x_n - x_{n-1})^2$$

11.13 Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[1,2]$, calculando posteriormente el punto intermedio si es que se verifican.

11.20 ¿En qué punto del intervalo $(0,2\pi)$ la tangente a la curva $y = \cos(-2x)$ es paralela a la recta $y = \sqrt{2}x + 4$?

11.28 Demostrar que la ecuación cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tiene una raíz real solamente si $b^2 - 3ac < 0$. aplicar esto a la ecuación $2x^3 - 9x^2 + 24x + 7 = 0$

11.30 Explicar por qué no es válida la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el intervalo $[-1,1]$

11.31 Sea $f: [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(2\pi)$. Demostrar que $\exists x_0 \in [0,2\pi) / f(x_0) = f(x_0 + \pi)$.

11.34 Aplicar el teorema del V.M. para demostrar que: a) $x > \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ b) $\arctg b - \arctg a < b - a$ si $a < b$

11.35 Sean dos funciones f y $g: [a,b] \rightarrow [0,1]$, continuas en el cerrado y derivables en el abierto y tales que $f(a) = g(b) = 0$, $f(b) = g(a) = 1$. Demostrar aplicando el teorema de Rolle que existen $x_0 \in [a,b]$ y $x_1 \in (a,b)$ tales que $f(x_0) = g(x_0)$ y $f'(x_1) = -g'(x_1)$

11.36 Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Sabiendo que existe un punto $c / f(c) > f(b)$ demostrar que existe un punto en el intervalo $[a,b]$ tal que se anula la derivada.

11.38 Suponiendo que g sea una función derivable en todo \mathbb{R} , hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $x = 0$ a la curva dada por $y = g\left(\frac{a + x}{a - x}\right)$

11.39 Examinar si se puede utilizar el teorema de Cauchy con las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ en $[0,3]$. Si lo es encontrar el correspondiente punto intermedio.

Utilizar ese desarrollo para demostrar que $1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2 \forall x \in [-1,1]$

11.49 Desarrollar por Mac-Laurent la función $x \cdot 2^x$

11.50 Dada la función $e^{\cos x}$. Hallar el polinomio de Taylor de segundo grado en el punto $x=0$

y dar una cota del error cometido en el intervalo $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{4}]$

- 11.52** Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = x \cdot \cos(x)$ en el punto $x = \delta/2$.
- 11.54** ¿Cuál es el error cometido al aproximar la función $f(x) = x \cdot a^x$ mediante el polinomio de Taylor de grado n relativo a la función f en un entorno del punto $x = 0$ ($a > 0$)
- 11.56** Usando la fórmula de Mac-Laurent para las funciones $\sin x$ y $\cos x$, formar el desarrollo de las siguientes funciones: a) $f(x) = x \cdot \sin x + \cos x^2$ b) $g(x) = x^2 \cdot \sin x^2 + \cos x$.
- 11.57** Sea $f(x) = \ln(e^{|x|} - 1)$ comprobar si se verifican las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$. En caso afirmativo, calcúlese el punto c que lo corrobora. Investigar si f verifica asimismo las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$. En caso positivo, hállese c .
- 11.58** La función $f(x) = \arctg(x) - 1/2 \cdot x^{1/2}$, se aproxima mediante el polinomio de Taylor (con $a = 0$) de grado 3. Acotar el error cometido para todo x de ese intervalo.
- 11.61** Demostrar que entre dos ceros de un polinomio $P(x)$ existe por lo menos un cero de la derivada $P'(x)$ y que entre dos ceros consecutivos del polinomio derivado $P'(x)$ hay a lo sumo un cero del polinomio $P(x)$.