

Tenemos el conjunto $M_{2 \times 2}$ de las matrices cuadradas de dos filas y dos columnas. Con la suma y el producto usuales ¿qué estructura tiene?

Sea $Q_3(x)$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a tres con coeficientes en Q ; con las operaciones de la suma de polinomios y el producto por escalares usuales. Estudiar si $Q_3(x)$ es un Q -espc. vectorial

Sea R_3 el espacio vectorial usual, consideremos los subespacios vectoriales engendrados por los vectores $u = (1,2,1)$, $v = (1,3,2)$, $x = (1,1,0)$, $y = (3,8,5)$ Demostrar que $\langle u, v \rangle = \langle x, y \rangle$

Se consideran en $P_2(X)$ los subconjuntos $U = \{p(x) / p(x) = ax^2 - ax + 2a \text{ a } 0 \in R\}$ y $W = \{p(x) / p(x) = (2b-c)x^2 + bx - 2c, b, c \in R\}$
 a) Probar que U y W son subespacios vectoriales de $P_2(X)$, hallar dimensiones y bases.
 b) Determinar $U \cap W$ y $U + W$

En $P_2(X)$, se consideran las bases $B = \{1, x, x^2\}$ y $C = \{1+x+x^2, x+x^2, 1+x^2\}$
 a) Hallar una base D cuyas ecuaciones de cambio de base C son:
 $x_1 = y_1 - 2y_3$ $x_2 = 5y_3 - y_2$ $x_3 = y_1 - 3y_2$
 b) Hallar las ecuaciones de un subespacio suplementario, respecto a la base C de $W = \{(x, y, z)_D / x+y-z=0, x+y+z=0\}$
 c) Descomponer, según W y el suplementario calculado en el apartado b), el polinomio $x+x^2$

Sea $A \in M_{2 \times 2}$ con escalares en R y $f: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ donde $f(T) = A \cdot T$. Se pide:

a) ¿Es f una aplicación lineal? $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Matriz asociada a f c) Dimensión y una base del núcleo y de la imagen de f

Sean $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $\{v_1, v_2\}$ bases de R^4 y R^2 respectivamente, y $f: R^4 \rightarrow R^2$ una aplicación lineal definida por $f(e_1) = v_1 + v_2$ $f(e_2) = v_1 - 2v_2$ y $\text{Ker } f = \langle (e_1 - 2e_2 + e_3, e_2 - 2e_3 + e_4) \rangle$. Si $g: R_2 \rightarrow R_4$

es una aplicación lineal que en las bases dadas viene dada por la matriz $M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar si $f \circ g$ es inyectiva o sobre
 b) Hallar una base de $\text{Ker}(f \circ g)$ y de la $\text{Im}(f \circ g)$ c) Análogamente para $g \circ f$

Sea M el espacio vectorial real de las matrices 2×2 con elementos en R , sea E el subespacio de M formado por los del tipo. Probar que las matrices A_1, A_2, A_3 forman una base de E

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f: M_{2 \times 2}(K) \rightarrow K$, siendo K el cuerpo de coeficientes, donde $f(A) = a_{11} + a_{22} = \text{traza de } A$
 Demostrar que : a) f es lineal. b) Si A y $B \in M_{2 \times 2}$ se verifica $f(A \cdot B) = f(B \cdot A)$
 c) Es imposible que existan A y B tales que $A \cdot B - B \cdot A = I$ d) Si E es el conjunto de matrices
 de la forma entonces $M_{2 \times 2} = \text{Ker}f + E$

Consideramos el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales. Se pide:

a) Ver si los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forman base en M_2

b) Obtener las coordenadas del vector $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en esa base.

c) Dada la aplicación D que hace corresponder a cada vector el número real obtenido al sumar los elementos de la diagonal principal, estudiar si D es un monomorfismo de espacios vectoriales. Hallar la expresión matricial de D .

Sean $M_{2 \times 2}$ y $M_{2 \times 1}$ junto con $f: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 1}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ una base de $M_{2 \times 2}$ y $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ una base de $M_{2 \times 1}$

a) ¿Es f inyectiva? b) Calcular la matriz de f respecto a dichas bases c) Calcular f^{-1}

Sea $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(A) = (\text{traza de } A, a_{11}) = (a_{11} + a_{22}, a_{11})$

Calcular el núcleo y la imagen de f , sus bases y dimensiones.
 Calcular las matrices asociadas a las aplicaciones lineales de la factorización canónica de f , referidas a las bases halladas.

$$\text{Sea } f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) / f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y + \alpha x \\ z & z + \alpha x \end{pmatrix}$$

Hallar las bases de $\text{Ker}f$, $\text{Im}f$, $\mathbb{R}^3 / \text{Ker}f$ y dar las ecuaciones de las aplicaciones que aparecen en la factorización canónica de f referida a estas bases.

$$\text{Sea el espacio vectorial } M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ y sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se define una aplicación $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de la forma $f(M) = MA + AM$ con $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Se pide:

a) Comprobar que f es lineal. b) Ecuación matricial de f .
 c) Dimensión y base de $\text{Ker}f$ y de $\text{Im}f$ d) Vectores invariantes

Hallar el núcleo de la aplicación lineal $f: E \rightarrow E$ definida por

$$f \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ 2b+c & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + b = 0 & ax + 2y + z = 0 & \\ x + ay + 2z + \frac{1}{4} = 0 & ax + y + z = 0 & \\ x + 3y + az + \frac{3}{4} = 0 & bx + 3y + bz = 0 & \\ & ax + 3y + bz = 0 & \\ & ax + by + z = b & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ax + y - z + w = 1 & & \\ 3x + 4y + z + 2w = 2 & & \\ x + y + z + w = 0 & & \\ 4x + 3y + 2z + w = b & & \end{array}$$

Sean U y W dos subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 definidos de la siguiente forma:

$$U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+b+c=0\} \quad W = \{(a,b,c) / b=c\} \quad ; \quad \text{Es } \mathbb{R}^3 = U \oplus W ?$$

En \mathbb{R}^4 , un vector v tiene por coordenadas respecto a la base $B = \{(-5,1,4,2); (2,1,3,0); (0,1,2,0); (-4,2,7,0)\}$ el vector $(5,1,-3,2)$.

Hallar las coordenadas de v en la base compuesta por los vectores $(2,1,2,3); (-1,0,3,5); (4,3,0,1)$ y $(5,-2,3,-1)$.

Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre \mathbb{R} y sea $B = \{a,b,c\}$ una base de V . Sea $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ definida por: $f(a+b) = 1$; $f(a-b) = 2$; $f(c-a) = 3$. Se pide: i) Hallar la expresión matricial de f . ii) Encontrar una base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $ma+b, mb$, con $m \in \mathbb{R}$ iii) En el caso particular en que $V = \mathbb{R}^3$, $a = (2,0,0)$ $b = (0,-1,2)$ y $c = (0,0,-3)$; hallar la matriz asociada a la base B y a la base canónica.

En el espacio vectorial $P_3(x)$ se da el siguiente conjunto de vectores $S = \{1, x+1, (x+1)^2, x^3\}$

- Sabiendo que S es una base de $P_3(x)$ determinar la matriz, en esa base, de la aplicación lineal $f(x)$ que a cada polinomio le asigna su derivada.
- Calcular $f^{-1}(3x^2+2x+1)$. ¿Es $f(x)$ diagonalizable?.

Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^3 definido por:

$$f(0,1,0) = (-1,0,1) \quad (2,0,1) \in \text{Ker } f \quad f^{-1}(2,0,0) = \text{Ker } f = \langle (0,0,1) \rangle$$

- Calcular la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y la expresión de la aplicación lineal.
- Ecuaciones del $\text{Ker } f$ y de $\text{Im } f$, así como bases y dimensión.
- Clasificar la aplicación lineal y hallar una base del subespacio vectorial de los vectores invariantes de f .

$$\begin{aligned} ax + y + z &= b \\ ax + 2y + z &= b \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + ay + z &= 7 \\ x + ay + z + t &= a \\ x + 2ay + t &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + y - z + w &= 1 \\ 3x + 4y + z + 2w &= 2 \\ x + y + z + w &= 0 \\ 4x + 3y + 2z + w &= b \end{aligned}$$

5.- Dado el sistema de ecuaciones

Calcular: a) Valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

b) Relación entre a para los casos en que el sistema tenga infinitas soluciones

2) Resolver utilizando el método de Gauss: $ax + y + z + t = a$

$$x + ay + z + t = a$$

$$x + y + az + t = a$$

$$x + y + z + at = a$$

Discutir y resolver según los valores de a , mediante el método de Gauss el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 & x + y + z &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 & 3x - 3y + 4z &= 7 \\ 2x + 3y + az &= 3 & 2x + ay + 3z &= 4 \\ & & 5x - ay + 7z &= 8+b \end{aligned}$$

Discutir según k , y y m y resolver en el caso compatible ¿determinado?

$$\begin{aligned} 3x + y + kz &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ mx + y + z &= 0 \\ x + my - z &= 0 \end{aligned}$$

Discutir el siguiente sistema según los valores de los parámetro a y b .

Resolverlo, si es posible para $a = 6$ y $b = 0$

$$\begin{aligned} x + 2y + az &= b \\ 3x + ay + bz &= 0 \\ 2x + 4y + 2z &= 0 \end{aligned}$$